TITLE:
研幾算法 (数学史の研究)

AUTHOR(S):
竹之内, 脩

CITATION:
竹之内, 脩. 研幾算法 (数学史の研究). 数理解析研究所講究録 2004, 1392: 1-14

ISSUE DATE:
2004-09

URL:
http://hdl.handle.net/2433/25855

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録 1392 巻 2004 年 1-14

研幾算法

竹之内　脩（Osamu Takenouchi）

1　研幾算法

研幾算法は、1683 年、建部賢弘 19 歳の折の出版である。

研幾の意は、幾はきざし、かすかなこと。研はくわしくきわめる、ということである。

出版に至るいきさつ

1671 年　古今算法記が、沢口一之によって著される。

これは、日本ではじめて本格的に天元術を使用して解答を与えた書物とされている。

沢口は、その最後に、15 問の遺題を与えた。

1674 年　關孝和、発微算法を著し、この遺題に解答を与える。

1678 年　田中由真、算法明解を著し、この遺題に解答を与える。

この両著とも、最終的な解答を得る方法を与えているのみで、そこに至る筋道は記されていない。－－－ 批判が起こる。

1681 年　佐治一平、算法入門を著し、発微算法を批判。

算法入門の中で、佐治一平は、発微算法誤改術として、關が古今算法記の遺題に解を与えた発微算法の術が、3 個を除いて誤りである、これを改む、として述べたものである。

> 発微算法一十五術内第六、第八、第九、右三箇正術也。初学者の及ぶべからざる此の術よし。他の十二術誤り也。此の趣新たむること、全く数学を励むにあらず。後の勘者欺くべき所、後生恐るべしの一つ。又、初学者の惑うべきの一つ。名を為し、術を為し、之を改む。

これに反発した建部は、研幾算法を著し、その序において、次のように述べている。

> 近間刊する所の算法入門に発微算法を議して、差誤有りと以爲(おもえり)也。蓋し渠(かれ)未だ曽つて演脱之神化を識らず。争(いかでか)幽微之術意を理會せんや哉。且つ、彼の書に数学乗除往来四十九問之答術に載るを視るに、或いは牽強して而して正を失し、或いは乖(かい)戻して而して眞を錯(あやま)る。多くは無稽之妄術也。故に、今、彼の問に於いて通變精微之術を編訂して、而して研幾算法と名づけて、以て蒙學に便りすと爾に云う。

この研幾算法は、ここにあるように、「数学乗除往来」(1674、池田昌意著)の遺題に解答を与えたものである。

研幾算法概要

研幾算法は、数学乗除往来の遺題 49 問に解答を与えたものである。その様式は、關の発微算法と同様に、最終的な解答を得る方法を与えているのみで、そこに至る筋道は記されていない。難解なものである。

ところで、ここに著者不明の「研幾算法演段諺解」と称する著書があり、それにより、この最終解に至る筋道を理解することができる。この著書は、建部が、「発微算法演段諺解」、「算学啓蒙諺解大成」と同様に、自らの著書に諺解を加えたものと解釈できると考えている。

第 1 問で与えられている式には、正当な解釈がつけにくい。

第 2 問には、[演段諺解] でも何も与えられておらず、どのように解決したのかよくわからない。

第 3 問では、[演段諺解] において、2 変数の 2 次方程式二つから、一つの変数を消去する方法が展開されている。これは、關の「解伏題之法」の手法である。これを思うとき、この書の出版が 1683 であり、關の「解伏題之法」には 1683 年重訂の記述があることから、この時期、すなわち 1680〜1683 の頃には、關のスクールでは、この変数消去の問題がいろいろ研究されていたのではないであろうか。もちろん、その萌芽は、発微算法にすでにあるのであるが。

第 4 問は、単なる一つの記述である。

第 5 問以降、第 48 問までは、[演段諺解] での記述は飛び飛びで、

6, 7, 8, 12, 16, 25, 27, 30, 32, 33, 37, 39, 42, 43, 46, 47, 48

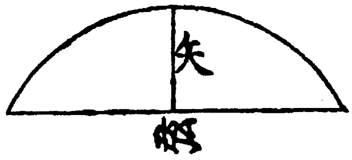
の問題について、記述されている。それらは、上記の消去問題に帰せられるものである。
それ以外の問題は、当時の普通の問題で、困難はない。

第 49 問は、性格が全く異なり、暦についての計算の問題である。これについては、「研幾算法第四十九解術」という書物が別にある。この当時、改暦が大きな問題であり、それは、1685 年、渋川春海によってなされた。それが貞享暦(じょうきょうれき)である。この第 49 問は、それ以前の宣明暦(せんみょうれき)に関するものである。建部の暦に関する研究は膨大なもので、それが、建部の真骨頂であるのかもしれない。

2　第１問

今、弧形がある。只云う、矢若干。

問う、積幾何ぞ。



圓の率は、周 355 尺、徑 113 尺

を用う。

原本 (数学乗除往来) 注に、

○第一問。本書に圓率を周 355 尺, 徑 113 尺を用いると云う。故に、此の率に合する術を以て之を記す。

とある。

○答て曰く、積を得る。

術に曰く、天元の一を立てて積と爲す。矢を以て相乗じて得る數に 16 を以て之に乗じ、得る數を甲位に寄せる。

○矢を列し、之を自して得る數に、これを四して弦冪に加入。共に得る數を乙位に寄せる。

○亦、矢を列し、之を自して得る數に、これを八して以て乙位を減じ、餘に弦を以て相乗じ、甲位を加入。共に得る數をこれを自して丙位に寄せる。

○矢七乗冪に乙位を相乗 183,275,520 段。乙位を四たび自乗 81 段。右二位相併せて共に得る數を丁位に寄せる。

○矢を九たび自乗 5,733,613,568 段。矢五乗冪乙位冪相乗 261,217,536 段。矢三乗冪乙位再乗冪相乗 96,337,664 段。矢冪乙位三乗冪相乗 73,573,068 段。右四位相併せて共に得る内、丁位を減じ、餘を左に寄せる。

○矢を列し、三たび之を自乗し乙位を以て相乗じ、亦丙位を以て相乗じ、得る數を 7,3549,440 を以て之に乗じ、左に寄せたると相消して、開方式を得る。之を平方に開き、積を得て、問いに合す。

[研幾算法演段諺解]

一率	矢四乗巾正実	559 万 9232 段
二率	矢三乗巾円径相乗負実	71 万 5920 段
三率	矢再乗巾円径巾相乗正実	408 万 1524 段
四率	矢巾円径再乗巾相乗正実	602 万 1104 段
五率	矢円径三乗巾相乗正実	1839 万 3267 段
六率	円径四乗巾負実	81 段
七率	円径再乗巾負广	459 万 6840 段

右一率に得る所、三率に得る所、四率に得る所、及び五率に得る所を列併し、得たる内、二率に得る数と、六率に得る数を併せ減じ、余を正実と為し、以て、七率に取る数を負广と為して、平方に之を開き、弧背を得て、本術従う。

<現代記法>

弦 $= c$, 矢 $= s$, 弧背 $= l$, 積 $= S$, 径 (直径)$= R$ とする。

[研幾算法]

天元 $= S$

$16sS \longrightarrow$ 甲

$4s^2 + c^2 \longrightarrow$ 乙

$((8s^2 - \text{乙})c + \text{甲})^2 \longrightarrow$ 丙

$183,275,520s^8 \times \text{乙} + 81\,\text{乙}^5 \longrightarrow$ 丁

$5,733,613,568s^{10} + 261,217,536s^6 \times \text{乙}^2 + 96,337,664s^4 \times \text{乙}^3$
$+73,573,068s^2 \times \text{乙}^4 \longrightarrow$ **左**

$73,549,440s^4 \times \text{乙} \times \text{丙}$ ··· **左と相消す**

[研幾算法演段諺解]

① $5,599,232\,s^5$

② $715,920\,s^4R$

③ $4,081,524\,s^3R^2$

④ $6,021,104\,s^2R^3$

⑤ $18,393,267\,sR^4$

⑥ $81\,R^5$

⑦ $4,596,840\,R^3$

$$l=\sqrt{\{①+③+④+⑤-(②+⑥)\}\div⑦}$$

解説

$$S=\frac{1}{2}\frac{1}{2}Rl-\frac{1}{2}(\frac{R}{2}-s)c$$

であるから、これを代入すれば、この二つの解は同じものであることがわかる。

問題では S を求めるようになっているが、S を直接求める式を作るのは困難である。まず、l を求め、それから S を求める式を得たものであろう。

いま、$R=1$ として、l^2 の式を書くと、

$$l^2 = \frac{1}{4596840}\times (5599232d^5-715920d^4+4081524d^3+6021104d^2+18393267d-81)$$

となる。この分母の 4596840 という数は、$=360\cdot 113^2$ である。

一方、現代の計算では、

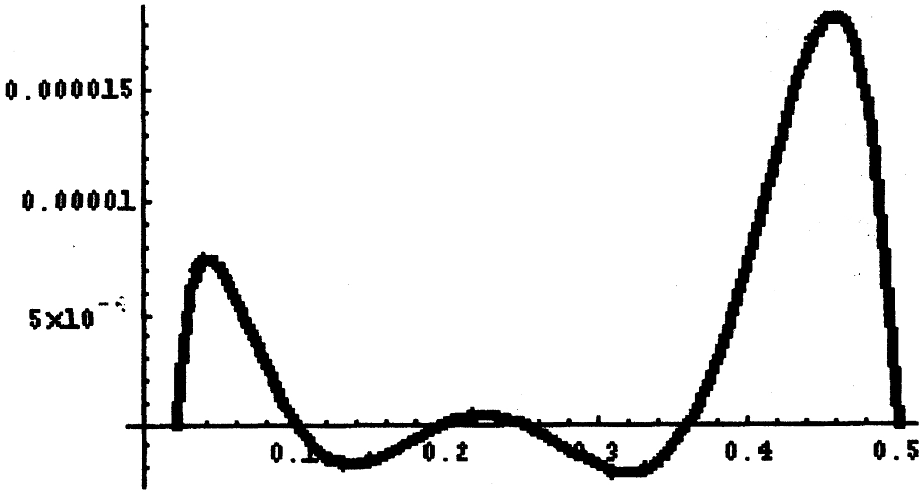
$$l=2\cos^{-1}(1-2s)$$

である。

この両者の値を比較してみよう。ただし、前者では、弧の長さそのものではなく、

$$\div 円周率\times\frac{355}{113}$$

とした値が使われている。このことについては、あとで述べる。前者で計算した l の値を $L_1(s)$、後者で計算した l の値に対して、$\frac{1}{3.14159265359}\times\frac{355}{113}$ の値を $L_2(s)$ として、$L_1(s)-L_2(s)$ のグラフを描くと、次のようになる。



(この値は、10^{-5} 程度のものであることに注意。)

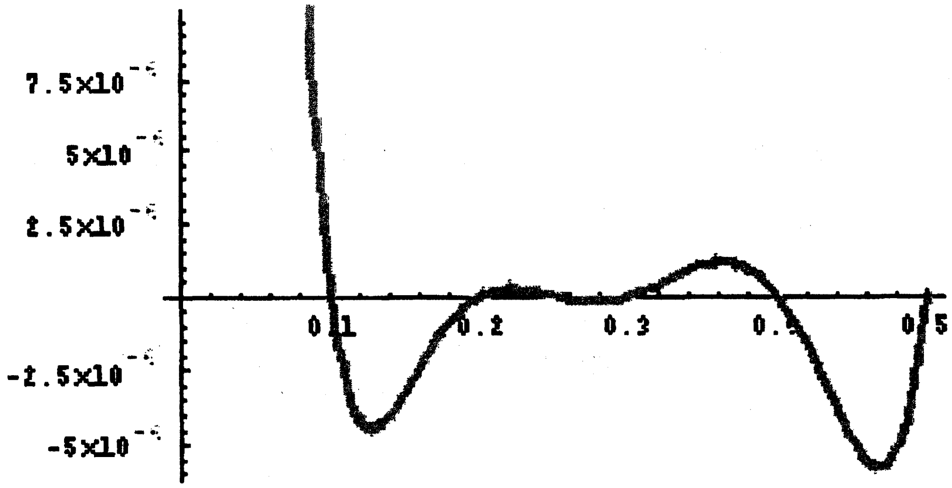
これで見ると、$s = 0.1,\ 0.2,\ 0.25,\ 0.5$ に対しては、両者一致する値が使われているが、とくに $s = 0.3,\ 0.4$ における差が目立つ。

s	0.1	0.2	0.25
$L_1(s)$	0.64350115715	0.92729530077	1.04719764012
$L_2(s)$	0.64350116344	0.92729529674	1.04719764012

0.3	0.4	0.45	0.5
1.15927766039	1.36944568008	1.47064688690	1.57079646018
1.15927957917	1.36943852229	1.47062903051	1.57079646018

そこで、$s = 0.3,\ 0.4$ における値を正しい値に設定して近似の多項式を求めると、

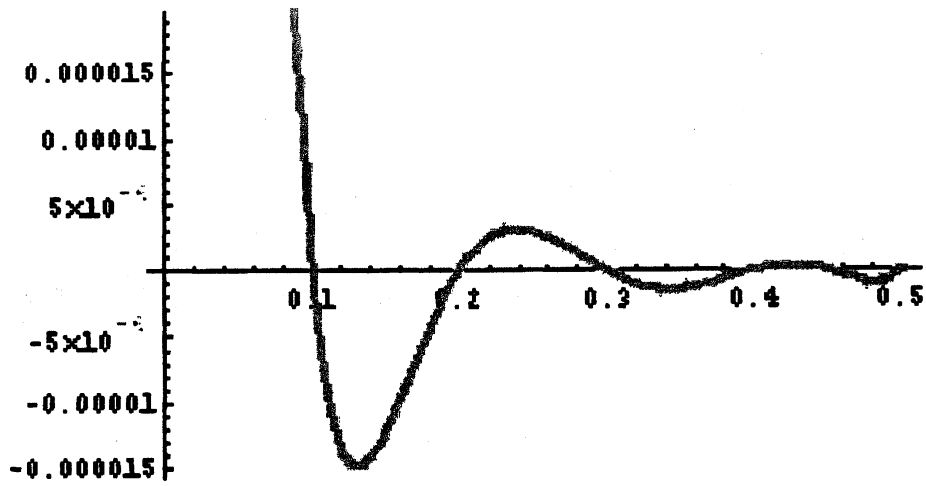
$$-1852 + 18435528s + 5652698s^2 + 5574064s^3 - 3548416s^4 + 7621828s^5$$



となる。

また、$s=0.25$ でなく、$s=0.3,\ 0.4,\ 0.45$ における値を正しい値に設定すると、

$$-4241+1.8490057s+5204922s^2+7265664s^3-6533592s^4+9611945s^5$$



となる。

いずれも 1 桁精度が上ることが認められる。

建部の解は、いずれこのように弧の長さを計算して、それに適合する多項式を求めたものに相違ないから、上に与えたように、弧の長さの計算において誤りがあった、とみなされる。どうしてそのような誤りが生じたか。それはこれからの検討課題である。

〔考察〕

建部は、圓の率は、周 355 尺、徑 113 尺 を用う、としている。

原本注に、

○第一問。本書に圓率を周 355 尺, 徑 113 尺を用いると云う。故に、此の率に合する術を以て之を記す。

とある。

数学乗除往来の原文では、

今、平圓欠有り。只云う、矢二尺五寸五分、弦一丈二尺。欠積を問う。

乃ち、平円積法、徑一百一十三尺、周三百五十五尺。之を用う。

とある。

關は、この値を「括要算法巻貞」において、得ている。その巻の巻首に、

假如有圓滿徑一尺則問圓周率若干
荅曰　徑一百一十三　周三百五十五

とあり、まず徑 1 の定周を得て、それから零約術でこの値を得る、としている。

この定周 3.14159265359 を得るのに、直径 1 の円に内接する正 32768, 65536, 131072 角形の周の長さを求め、それから増約術で、この値を出している。

次いで、零約術で、$\frac{355}{113}$ を求めているのであるが、この値は、定周に比して微かな差があるけれども、定周の値は、これを使うとなると桁数が多いので、この分数の値を定率とする、といって、その後の計算では、この分数を使っているのである。

そして、次に円弧において、矢の値を与えて、弧の長さを求めている。これには、上に定周を求めたのと同じ増約術の手段を使っている。そして、その弧の長さとして、

矢の長さ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.45
弧の長さ	0.6435011087932843868	0.927295218	1.15927948073	1.36943840601	1.47062890563

を得ている。これは、正しい値である。

そして、さらにこれから、上の定率にあわせるために、これを、定周 3.14159265359 で割り、$\frac{355}{113}$ を掛けて、これを報背と名付けている。建部が上の計算で用いているのは、この報背の値に他ならない。

さてこのように、建部は關の出した結果を用いて上の計算をしているのであるが、そのことは、關の括要算法巻貞が、この建部の研幾算法より以前の成果であることを意味するであろう。研幾算法は 1683 年の出版であるから、關の仕事はそれ以前となる。解伏題之法には 1683 年という年次が書かれており、これから察するに、關は、1680〜1683 年頃、もっとも活動的で実り多い仕事をしていたのであろう。

3　第 2 問

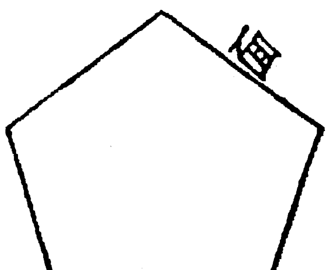
今、五角形がある。

只云う、面若干。

問う、積幾何ぞ。

並びに、七角形及び九角形の積を問う。

○答て曰く、各積を得る。



五角形の積を求める術に曰く、

天元の一を立てて五角形の積と爲す。

之を倍し、角數に因り、面に因る平徑と爲す。之を自して得る數、之を四たびして、甲位に寄せる。

○面を列し、三たび之を自乘し、角數の冪を以て相乘じて得る數、之を三たびして得る内、甲位を減じて、餘りを乙位に寄せる。

○亦、面を列し、三たび之を自乘し、角數の冪を以て相乘じて得る數を甲位を加入して、角數冪に因り面冪に因る四段の角徑冪と爲す。乙位を以て相乘じて、角數再乘冪に因る 16 段の五角形の面七乘冪と爲す。左に寄せる。
○面を列し、七たび之を自乘して、角數再乘冪をもって相乘じて得る數、分に就いて 16 を以て之に乘じて、左に寄せたると相消して開方の式を得て、三乘の方の飜法に之を開き、五角形の積を得て、問に合す。

七角形の積を求める術に曰く、天元の一を立てて七角形の積と爲す。之を倍し、角數に因り、面に因る平徑と爲す。之を自して得る數、之を四たびして、甲位に寄せる。
○面を列し、三たび之を自乘し、角數の冪を以て相乘じ、之を三たびして得る數、以て甲位を減じて、餘り、之を自して得る數を乙位に寄せる。
○亦、面を列し、三たび之を自乘し、角數の冪を以て相乘じて得たる數を甲位を加入して、角數の冪に因り面冪に因る四段の角徑冪と爲す。乙位を以て相乘じて、角數四乘冪に因る 64 段の七角形の面一十一乘冪と爲す。左に寄せる。
○面を列し、一十一たび之を自乘して、角數四乘冪をもって相乘じて得る數、分に就いて 64 を以て之に乘じて、左に寄せたると相消して開方の式を得て、五乘方の飜法に之を開き、七角形の積を得て、問に合す。

九角形の積を求める術に曰く、天元の一を立てて九角形の積と爲す。之を倍し、角數に因り、面に因る平徑と爲す。之を自して得る數、之を四たびして、甲位に寄せる。
○面を列し、三たび之を自乘し、角數の冪を以て相乘じ、之を三たびして得る數、以て甲位を減じて、餘りを乙位に寄せる。
○亦、面を列し、三たび之を自乘し、角數の冪を以て相乘じ、之を四たびして得る數、以て乙位を減じて、餘りを丙位に寄せる。
○亦、面を列し、三たび之を自乘し、角數の冪を以て相乘じて得る數を、甲位に加入し、角數の冪に因り面冪に因る四段の角徑冪と爲す。乙位を以て相乘じ、亦丙位を以て相乘じ、角數四乘冪に因る 192 段の九角形の面一十一乘冪と爲す。左に寄せる。
○面を列し、一十一たび之を自乘し、角數の四乘冪を以て相乘じて得る數を分に就いて 192 を以て之に乘じ、左に寄せたると相消して開方の式を得て、五乘方の飜法に之を開き、九角形の積を得て、問に合す。

[研幾算法演段諺解]

記述無し。

[建部の解]

面積 $= S$、1 辺の長さ $= a$、

平径 (内接円の半径) $= r$、角径 (外接円の半径) $= R$ とする。

五角形について

- $2S = 5ar \qquad 4(2S)^2 = 4(5ar)^2$ … 甲位 とする。
- $3 \cdot 5^2 a^4 -$ 甲位 … 乙位 とする。
- $5^2 a^4 +$ 甲位 $= 4 \cdot 5^2 a^2 \times R^2 \qquad \times$ 乙位 $= 16 \cdot 5^4 a^8$

この最終式は誤りである。[現代的解釈] 参照

七角形について

- $2S = 7ar \qquad 4(2S)^2 = 4(7ar)^2$ … 甲位 とする。
- $3 \cdot 7^2 a^4 -$ 甲位 これを2乗 … 乙位 とする。
- $7^2 a^4 +$ 甲位 $= 4 \cdot 7^2 a^2 \times R^2$
- (上の式) $\times$ 乙位 $= 64 \cdot 7^5 a^{12}$

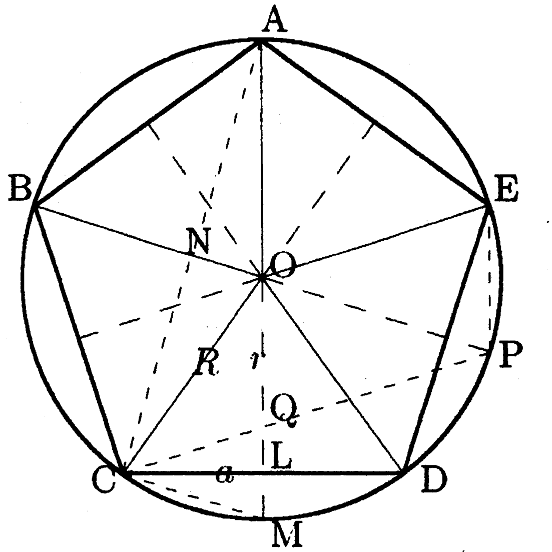
九角形について

- $2S = 9ar \qquad 4(2S)^2 = 4(9ar)^2$ … 甲位 とする。
- $3 \cdot 9^2 a^4 -$ 甲位 … 乙位 とする。
- $4 \cdot 9^2 a^4 -$ 乙位 … 丙位 とする。
- $9^2 a^4 +$ 甲位 $= 4 \cdot 9^2 a^2 R^2$
- (上の式) $\times$ 乙位 $\times$ 丙位 $= 192 \cdot 9^5 a^{12}$

この最終式は誤りである。[現代的解釈] 参照

[現代的解釈]

五角形



AC$= a_2$、 また、O から AC に立てた垂線の長さを r_2 とする。

$$2ar = Ra_2, \quad 2a_2 r_2 = Ra$$

辺々相乗じて、

$$4rr_2 = R^2 \qquad \cdots \text{①}$$

次に、 $2R\cdot r_2 = 2R(r-\mathrm{BN}) = 2R^2 - a^2$

一方、$2r_2 = 2\mathrm{ON} = \mathrm{CM} = \mathrm{EP} = \mathrm{OQ} = \ R - 2(R-r) = 2r - R$

故に、 $2R\cdot r_2 = R(2r-R)$

上記とあわせて、

$$2R^2 - a^2 = R(2r-R)$$

これより、

$$a^2 - R^2 = 2R^2 - 2Rr = 2R(R-r) = 2R\cdot \mathrm{LM} = \mathrm{CM}^2 = 4\,\mathrm{ON}^2 = 4r_2^2$$

$4(a^2-R^2) = 3a^2 - 4r^2$ であるから、

$$16r^2r_2^2 = r^2(3a^2-4r^2)$$

① によって、

$$r^2(3a^2-4r^2) \ = \ R^4$$

建部の与えた解の最終式は、

$$5^2a^4R^2 \times (3a^2-4r^2) \ = \ 16\cdot 5^4a^8$$

であり、簡約すると、

$$R^2(3a^2-4r^2) \ = \ 4a^4$$

となる。

これは、正しくない。

上記の解の最終の式は、

$$S \ = \ 5\cdot\frac{1}{2}ar, \quad 4R^2 \ = \ 4r^2 + a^2$$

を用いれば、a と S, r, R との間の関係式に変形できる。例えば、

$$\left(\frac{2S}{5a}\right)^2\left(3a^2 - 4\left(\frac{2S}{5a}\right)^2\right) = \left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2S}{5a}\right)^2\right)^2$$

これを整理して、

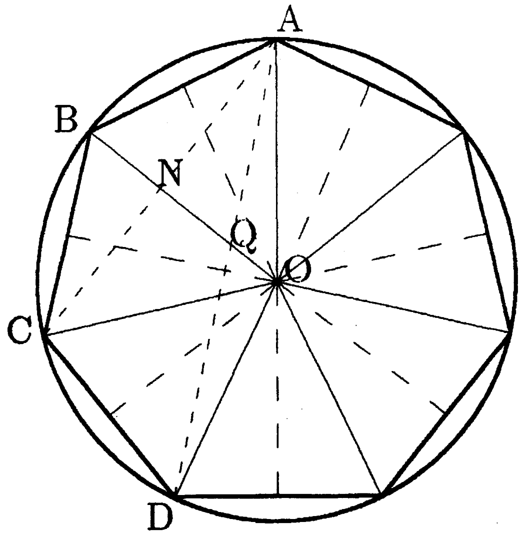
$$\text{開方式} \quad -125a^8 \ + \ 800a^4S^2 \ - \ 256S^4 \ = \ 0$$

が得られる。

他のものについても、同様である。

以下の七角形、九角形についても同様であり、特に注意しない。

七角形



AC$=a_2$、AD$=a_3$　O から AB, AC, AD に立てた垂線の長さを $r,\ r_2,\ r_3$ とする。

$$2ar=Ra_2,\quad 2a_2r_2=Ra_3,\quad 2a_3r_3=Ra$$

辺々相乗じて、　$8rr_2r_3=R^3$

そして、

$$2Rr_2=2R(R-\mathrm{BN})=2R^2-a^2$$

$$R\cdot\mathrm{OQ}=R(R-2\mathrm{BN})=R^2-a^2$$

さらに、$\dfrac{r_3}{\mathrm{OQ}}=\dfrac{r}{R}$ から、$R\cdot r_3=r\cdot\mathrm{OQ}$

これらから、

$$4r^2(2R^2-a^2)(R^2-a^2)=4r^2\cdot 2Rr_2\cdot R\cdot\mathrm{OQ}=8r\cdot Rr_2\cdot r\cdot\mathrm{OQ}\cdot R$$

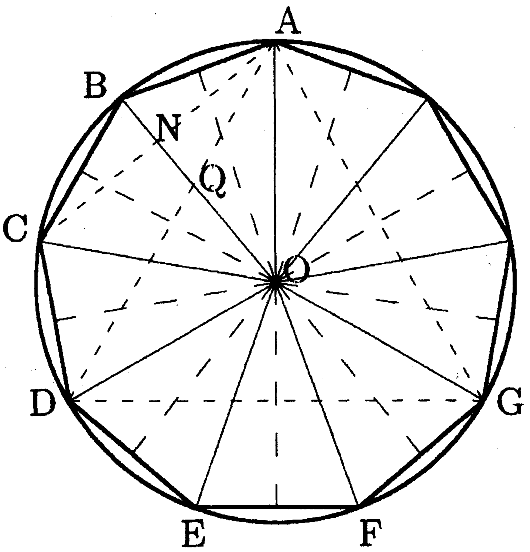
$$=8rr_2r_3\cdot R^3=R^6$$

ここで、$4r^2=4R^2-a^2$ であるから、$(4R^2-a^2)(2R^2-a^2)(R^2-a^2)=R^6$

これを展開すれば、$7R^6-14R^2a^2+7R^2a^4=a^6$　ゆえに、$,R^2(R^2-a^2)^2=a^6$

$4R^2-4a^2=4r^2-3a^2$ であるから、　$7R^2(4r^2-3a^2)^2=16a^6$

九角形



O から AB, AC, AD に立てた垂線の長さを r, r_2, r_3、また、AD と OB の交点を Q とする。△ADG は正三角形であるから、$r_3 = \frac{1}{2}R$

$$2R \cdot \mathrm{BN} = a^2$$

$$4R \cdot \mathrm{OQ} = 4R(R - 2 \cdot \mathrm{BN}) = 4R^2 - 4a^2 = 4r^2 - 3a^2$$

$$r \cdot \mathrm{OQ} = R \cdot r_3 = \frac{1}{2}R^2$$

これから、

$$2R^3 = r(4r^2 - 3a^2)$$

建部の与えた解の最終式は、

$$4 \cdot 9^2a^2R^2 \times 9^2a^2(4r^2 - 3a^2) \times 9^2a^2(a^2 + 4r^2) = 192 \cdot 9^5a^{12}$$

であり、簡約すると、

$$3R^4(4r^2 - 3a^2) = 4a^6$$

となる。

これは、正しくない。

4 第 3 問

今、圓の内に圖の如く五斜有り。

只云う、甲斜 若干、乙斜 若干、

丙斜 若干、丁斜 若干、

戊斜 若干。

問う、圓径幾何ぞ。

[研幾算法演段諺解]

この中に、詳細な解が書かれている。

5 第 4 問

円に関する諸率

$$3.142,\quad \frac{22}{7},\quad \frac{157}{50},\quad \frac{355}{113}$$

を求める術を問うている。

6　第 5 問　～　第 48 問

第 5 問以降、第 48 問までは、[演段諺解] での記述は飛び飛びで、

6, 7, 8, 12, 16, 25, 27, 30, 32, 33, 37, 39, 42, 43, 46, 47, 48

の問題について、記述されている。それらは、上記の消去問題に帰せられるものである。それ以外の問題は、当時の普通の問題で、困難はない。

7　第 49 問

第 49 問は、性格が全く異なり、暦についての計算の問題である。